ISSN 0798 1015

REVISTA ESPACIOS

HOME Revista ESPACIOS ÍNDICES / Index A LOS AUTORES / To the AUTORS

EDUCACIÓN • EDUCAÇÃO • EDUCATION Vol. 40 (Nº 17) Año 2019. Pág. 12

El papel de la resolución de problemas para la enseñanza del Cálculo Integral: Un estudio de caso

The role of problems solving for the teaching of integral calculus: A case study

LÓPEZ-LEYTON, Cristhian 1; ALDANA, Eliécer 2 y ERAZO, Jhon D. 3

Recibido: 21/11/2018 • Aprobado: 20/03/2019 • Publicado 27/05/2019

Contenido

RESUMEN:
Esta investigación tiene como propósito analizar las Creencias y Concepciones de profesores sobre el papel de la Resolución de Problemas para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Integral. Para ello, se emplea como marco referencial las creencias y concepciones de los profesores (Moreno y Azcárate, 2003) bajo un estudio etnográfico (Murillo y Martínez, 2010). A partir de los resultados se presenta una acción mejoradora apoyada en el Enfoque Ontosemiótico y la instrucción matemática de Godino, Batanero y Font (2009).
Palabras clave: Resolución de problemas, Cálculo.

ABSTRACT:
The purpose of this research is to analyze the Beliefs and Conceptions of teachers on the role of Problem Solving for the teaching and learning of Comprehensive Calculus. For this, the beliefs and conceptions of teachers (Moreno and Azcárate, 2003) under an ethnographic study are used as a reference framework (Murillo and Martínez, 2010). An improvement action based on the Ontosemiotic Approach and the mathematical instruction of Godino, Batanero and Font (2009) is presented from the results.
Keywords: Resolution of problems, Calculus

1. Introducción

Posterior a su formación académica, el profesional que ingresa a la sociedad trae consigo reflexiones y procesos de pensamiento que lo hacen único para el sistema de prácticas de su entorno, además, con el transcurso de su vida, adquiere una identidad propia que fundamenta su personalidad, todo lo anterior derivado de experiencias personales que junto a sus juicios y conceptos constituyen el ser (Cortés y Sanabria, 2012). En conclusión, la conducta y comportamiento del profesional proviene de una historia de vida particular y por lo tanto su formación y aprendizaje también.

Los profesores de matemáticas no son ajenos a esta situación, puesto que desde sus primeros años de básica en el colegio hasta su formación como docentes alcanzan una serie de fundamentos teóricos y prácticos que, enlazados a sus vivencias personales, intervienen en su labor profesional. Por lo anterior, investigaciones como Schmelkes (2001); Ávila (2004); Ezpeleta (2004); Búrquez, Domínguez y Vera (2005); y Serrano (2010) afirman que existe una descontextualización y deficiente atención de los programas educativos en torno a aspectos como las concepciones, creencias, actitudes, posturas, hábitos, y realidad del docente, como variables que intervienen en el desarrollo de la práctica educativa al igual que la planificación de la misma.

En evidencia de lo anterior, Moreno y Azcárate (2003) revelan que para los profesores universitarios la buena enseñanza está exclusivamente ligada al nivel de conocimiento de la estructura matemática que poseen, mas no a sus estrategias didácticas. Lo anterior, implica que *no* se planteen la necesidad de una formación didáctica de la cual emergen herramientas para su trabajo en clase. Es por ello que, Santos (2007) enfatiza la importancia de extender el aprendizaje de las matemáticas más allá de solo aprender un conjunto de algoritmos, procedimientos, fórmulas o reglas para resolver cuestiones rutinarias tal y como se evidencia en las aulas. Por el contrario, los estudiantes deben enfrentarse a problemas y situaciones problema que les permita investigar y reconocer correspondencias, desarrollar conjeturas, apropiarse de distintos sistemas de representación, establecer vínculos, emplear varios argumentos y comunicar sus resultados (Santos y Vargas, 2003). En este sentido, el aprendizaje mediante la RP toma un papel en el aula de acuerdo con las concepciones del profesor en torno a los componentes específicos del conocimiento didáctico del contenido matemático (Shulman, 1986).

En conclusión, este estudio busca analizar las creencias, intuiciones y concepciones que tienen los profesores sobre el papel que obtiene la RP en la enseñanza de los conceptos fundamentales del Cálculo Integral teniendo en cuenta prácticas institucionales, personales, epistemológicas, didácticas, instruccionales y cognitivas. A partir de lo anterior, se asevera la necesidad de considerar desde una postura investigativa el siguiente planteamiento:

¿Cuáles son las creencias y concepciones de los profesores sobre el papel de la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos fundamentales del Cálculo Integral?

1.1. Aspectos conceptuales

En este apartado, se presentan aspectos conceptuales relacionados con las creencias, las concepciones, la relación entre estos dos aspectos teóricos; y la resolución de problemas para el aprendizaje de las matemáticas.

Las creencias

Están asociadas a rasgos de tipo subjetivo de las personas, están ligadas a los sentimientos y guiadas por las emociones en torno a los aspectos propios de la personalidad; en el caso de los profesores las creencias obedecen a acciones de tipo empírico sobre percepciones del hacer del docente sobre su práctica pedagógica que “sirven como filtro para todo aquello que supone el proceso enseñanza-aprendizaje” (García, Azcárate y Moreno, 2006, p. 87). Por su parte, Pajares (1992) citado en Gil-Cuadra y Rico (2003) considera que las creencias se asocian como el elemento cognitivo derivado del grado de razonamiento que el profesor da a sus ideas, un componente afectivo basado en sus experiencias o circunstancias enfrentadas, y finalmente, elementos conductuales que relacionan su círculo social y laboral ante sus posiciones en torno a la enseñanza.

Las concepciones

Son producto del razonamiento y entendimiento; incluyen creencias, significados, preferencias, conceptos, proposiciones, reglas, e imágenes mentales que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan (Lopez-Leyton, Aldana y Erazo, 2018).

En particular, para Flores (1998) las concepciones de los profesores de matemáticas se manifiestan como la visión frente a su desempeño, sobre cómo entiende y proyecta su profesión, la estructura mental que sobrepone cuando enfrenta cada momento de la enseñanza, así como sus posturas frente a objetos matemáticos relevantes, métodos y materiales disponibles, estrategias de enseñanza-aprendizaje, y la finalidad del conocimiento (finalidad de las matemáticas). Es por ello que, de acuerdo con Contreras y Carrillo (1995) las concepciones se presentan como un condensado de posturas que un profesor antepone para realizar su trasposición e intervención didáctica, es así como estos sistemas cognitivos referentes a la enseñanza y aprendizaje conforman la organización sus estrategias como docente.

En conclusión, entre las creencias, la formación académica y la trayectoria de cada profesor existe una relación de inclusión que conforma su moldura organizacional de los conceptos. Al respecto Llinares (1991) afirma que las creencias son el contexto psicológico donde se conforman las estructuras personales del conocimiento, de allí emergen las concepciones sobre el desarrollo de los contenidos, así como las trayectorias idóneas para resolver situaciones matemáticas, para ello, se utilizan ideas producto de la experiencia que toman vida en el aula de clase. A partir de estas concepciones, el profesor hace la transposición didáctica y utiliza la resolución de problemas desde diferentes enfoques como: metodología, estrategia, contenido o generalmente como una aplicación después de haber concluido la enseñanza de un objeto matemático del conocimiento.

La resolución de problemas (RP)

Según Stanic y Kilpatrick (1989) los problemas han ocupado un lugar central en el currículo matemático escolar desde muchos años atrás, pero la resolución de problemas, no. Sólo recientemente los que enseñan matemáticas han aceptado que el desarrollo de la habilidad para resolver problemas merece una atención. A partir de estos planteamientos, emerge la necesidad de precisar y definir el significado de la resolución de problemas (RP). En síntesis, la RP ha adoptado diferentes significados en función del uso que se le ha dado:

- Resolver problemas como contexto para: enseñar matemática, crear motivación por algunos temas, recrear, desarrollar habilidades, y práctica.
- Resolver problemas como destreza: rutinarios (habilidades básicas), no rutinarios (de nivel superior), y técnicas de resolución como contenido para aplicar lo aprendido.
- Resolver problemas es "hacer matemática": enfocar el trabajo de los matemáticos para resolver problemas y concibiendo la matemática como problemas y soluciones (Pólya, 1954).

En este sentido, los significados de los profesores sobre la RP, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas están sujetas a las concepciones que desarrolla paralelo a su práctica educativa. De igual manera, estas estructuras cognitivas intervienen en la forma como se conciben los ejercicios, problemas y situaciones problema en matemáticas.

2. Metodología

Esta investigación de corte cualitativo "está orientada a la comprensión, cuyo objetivo es describir e interpretar la realidad educativa desde dentro" (Sabariego, 2009, p. 281); en función describir la forma como los docentes conciben la construcción de los conceptos de: antiderivada e integral definida, y el papel que la RP juega para la enseñanza y aprendizaje en estudiantes de tercer año de Licenciatura de Matemáticas.

Este estudio está sustentado en un método de investigación etnográfico (Bisquerra et al., 2009) ya que este tipo de investigación da lugar a explicaciones particulares de condiciones, acontecimientos, individuos, relaciones y/o conductas que son observables. Así, se toma como objetivo lo que afirman estos individuos, sus prácticas, posturas, creencias, razonamientos y observaciones que vienen de su misma expresión y no como el investigador los detalle. (González y Hernández, 2003).

La población se conforma por 52 profesores, de los cuales se determinó el docente encargado del espacio académico de Cálculo Integral para el programa de licenciatura en matemáticas. En cuanto al diseño metodológico, se adoptaron las fases de la investigación etnográfica de acuerdo con (Murillo y Martínez, 2010): Selección del diseño; determinación de las técnicas; acceso al ámbito de investigación; selección de los informantes; recogida de datos y la determinación de la duración de la estancia en el escenario; procesamiento de la información recogida; y elaboración del informe. El diseño se resume en las siguientes fases:

Fase 1. Planeación: tiene que ver con el planteamiento del problema, formulación de los objetivos, definición del marco teórico, y el diseño metodológico (instrumentos y técnicas de análisis).

Fase 2. Ejecución: Se planea el acceso al ámbito de investigación, la selección de informantes (profesores y estudiantes) y el trabajo de campo.

Fase 3. Análisis: Es el tratamiento de la información obtenida a través de los instrumentos establecidos (diario de campo, preparadores de clase de los profesores, apuntes de clase de los estudiantes, entrevistas semiestructuradas, y finalmente la observación y el registro de episodios en audio) mediante el método de la triangulación.

Fase 4. Informe: Hace referencia con la escritura formal del trabajo de grado de acuerdo con las nomas APA.

2.1. Proceso de análisis

El procesamiento de la información recogida mediante el diario de campo permitió, establecer categorías de análisis que luego fueron trianguladas con entrevistas semi-estructuradas durante el trabajo de campo, lo anterior con el propósito de desarrollar una comprensión sistemática para identificar los patrones que configuran las concepciones y el modelo de resolución de problemas adoptan en el aula de clase. Así, fue posible determinar el conocimiento, la experiencia, las acciones, las metodologías, las técnicas, los recursos, el contrato didáctico, las variables didácticas, la transposición didáctica, y la interacción, para acercarnos a una trayectoria real sobre la enseñanza del Cálculo a través de la RP.

3. Resultados

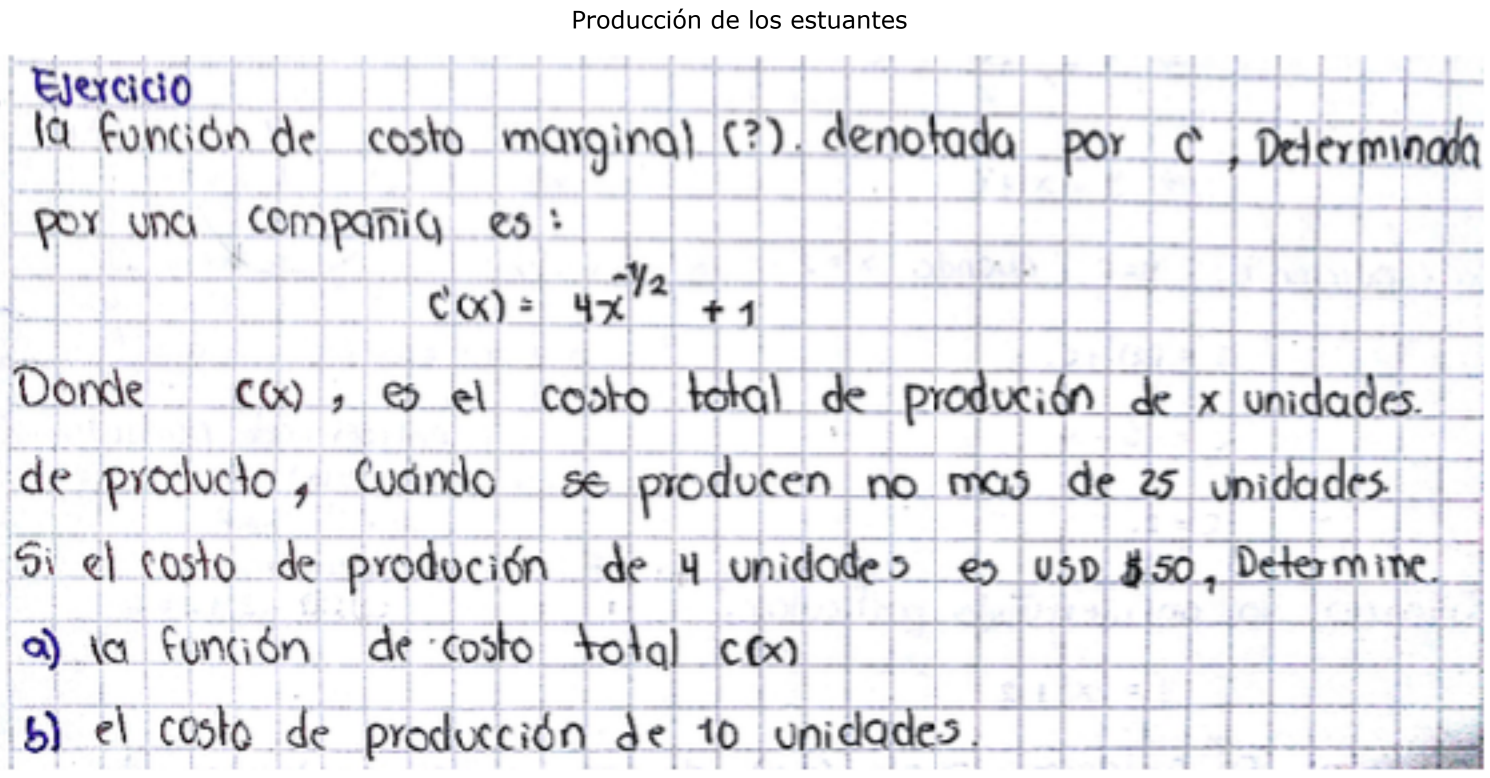
En este apartado los resultados y la discusión se presentan en función de los episodios de clase de cálculo integral durante varias sesiones en el primer semestre de 2017. La información obtenida y el registro de estos episodios se obtuvieron a partir del reconocimiento en un diario de campo configurado por las notas de clase del profesor, los apuntes de los estudiantes y una entrevista semiestructurada. En este sentido, los episodios son presentados y discutidos mediante la triangulación de la información obtenida de los instrumentos mencionados, como se presenta a continuación:

Tabla 1
Análisis de las sesiones

Descripción (Sesión 1)

Después de exponer temáticas como Antiderivada; Teorema del valor medio; y Propiedades de antiderivación, el docente plantea diferentes ejercicios para ilustrar algoritmos y procesos relacionados con los teoremas y demostraciones que se realizaron en clase. En uno de ellos plantea una situación del contexto económico para denotar noción de "uso", y posteriormente, es resuelto por el docente en clase de forma expositiva:

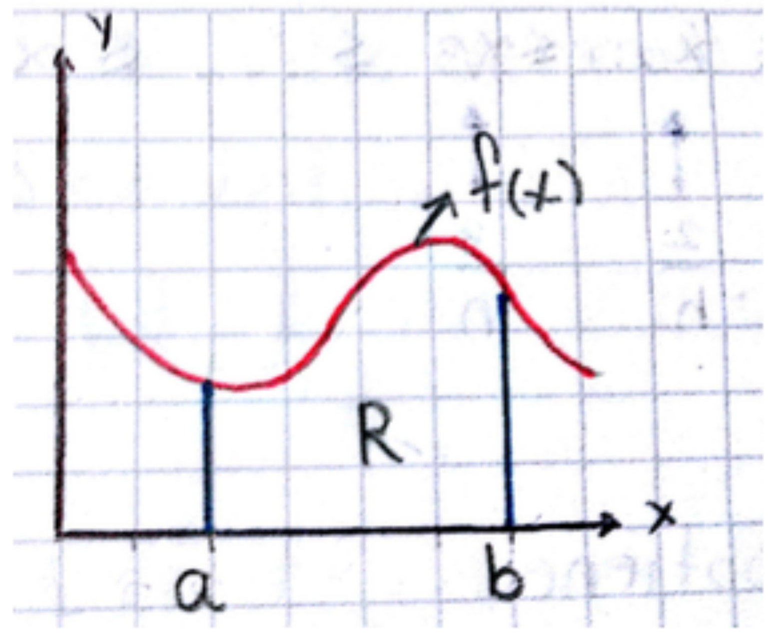
Figura 1
Producción de los estuantes


Ejercicio
la función de costo marginal (?). denotada por c', Determinada por una compañia es:
$c'(x) = 4x^{-1/2} + 1$
Donde c(x), es el costo total de produción de x unidades. de producto, Cuándo se producen no mas de 25 unidades. Si el costo de produción de 4 unidades es USD $50, Determine.
a) la función de costo total c(x)
b) el costo de producción de 10 unidades.

En las clases siguientes y después de desarrollar temas como Regla de la cadena para antiderivadas "sustitución simple"; Notación sigma y sus Propiedades, se plantean ejercicios que establecen los algoritmos que ilustran teoremas y definiciones. A continuación, el profesor plantea:

Área: El problema; Dada una función f definida en un intervalo [a,b] tal que *f(x)*>0 para toda x ϵ [a,b]

Figura 2
Producción de los estudiantes



Entonces, se determina la región **R** que está por encima del eje *x*, por debajo de la curva *y=f(x)*, a la derecha de la recta *x=a* y a la izquierda de la recta *x=b*. **R** se describe formalmente como un conjunto del plano:

$$R = \{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$$

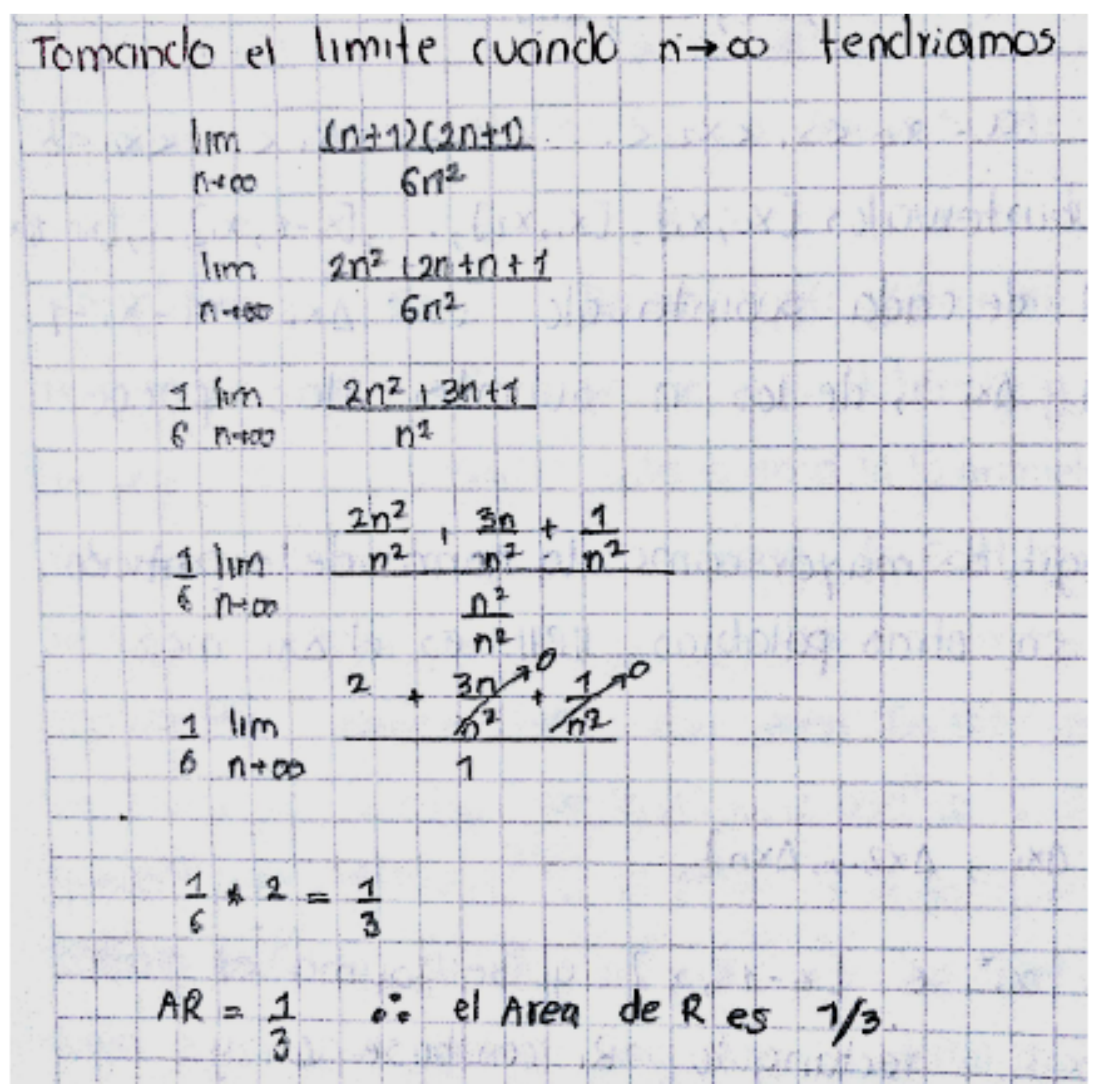
El docente plantea la pregunta ¿Cuál es el área de R?

Área: Considere el problema de determinar el área de la parábola $y=x^2$ **,** sobre el eje*x,* y para $x \in [0,1]$; es decir se quiere determinar el área de la región R.

$$R = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$$

El docente da solución a este problema hallando una aproximación del área dividiendo el intervalo [0,1] en n sub-intervalos de longitud $\Delta x = \frac{1-0}{n}$, planteando una suma de Riemann y en lo que al final tomando el limite cuando $n \to \infty$, resulta:

Figura 3
Producción de los estudiantes



Finalmente, el docente plantea otro ejercicio para sus estudiantes:

Ejercicio: Usando lo que se hizo anteriormente, calcular el área bajo la (curva) parábola $y= x^2 + 1$ en [0,2]

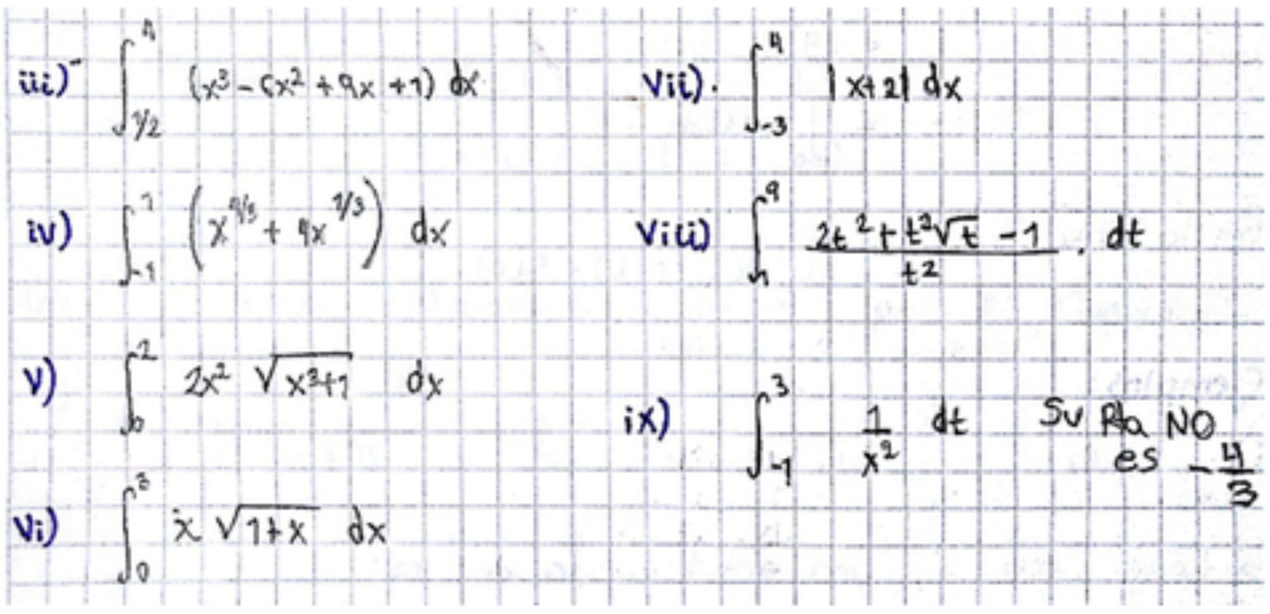
Argumento (visión del etnógrafo)

El docente parte desde el concepto de Antiderivada como proceso contrario a la derivada, posteriormente expone la definición formal y se estudian algunos teoremas introductorios para formalizar el teorema de la Antiderivada de una función, a partir de ello se trabajan sus propiedades y se realizan ejercicios a manera de ejemplos que ilustran o dejan ver la utilidad de los teoremas y las propiedades (Evaluar antiderivadas). Posterior a esto, se plantea un problema del contexto económico (costo marginal, coso total) en el cual se debe recurrir a la antiderivación para su solución, este ejercicio es resuelto por el docente y en su método de solución se evidencia el modelo de Pólya (1954); En primer lugar, se hace un análisis del enunciado del problema con todos los participantes en el aula donde se plantean preguntas como ¿Qué me pide hallar? ¿Qué datos tengo? Y ¿Qué herramientas dispongo para hacerlo? A continuación, el docente comenta un método de solución (concibe un plan) el cual es ejecutado paso a paso a la vista de sus estudiantes. Al finalizar el docente cuestiona a sus aprendices sobre si el resultado es posible y tiene coherencia.

La situación del área bajo la curva es expuesta mediante un problema desde el contexto matemático como: "El problema de calcular el área de una región R que se encuentra delimitada por una función, ejes coordenados y rectas". En este sentido se hace una construcción a partir una suma de Riemann que da solución al escenario planteado, posteriormente se realizan ejercicios del mismo contexto a manera de ejemplo.

Descripción (Sesión 2)	Argumento (visión del etnógrafo)
En las clases anteriores el profesor a expuesto dos teoremas fundamentales (teorema fundamental de cálculo parte I y teorema fundamental del cálculo parte II) en función de ello, el docente hace estudio previo de las siguientes temáticas: Definición de relación inversa de la integral y la derivada, teorema fundamental de cálculo parte I y teorema fundamental del cálculo parte II. Posteriormente al enunciado del teorema y sus respectivas demostraciones se hacen ejercicios a manera de ejemplo. A continuación, el docente asigna a sus estudiantes diferentes ejercicios para practicar lo visto en la clase. **Figura 4** Producción de los estudiantes	El docente hace exposición de teoremas con sus respectivas demostraciones que son ejemplificadas con ejercicios para ilustrar su utilidad y algoritmo respectivo. Esto según con la visión de Blanco (1993) se constituye como una herramienta que procura resolver, evocar o rememorar un objeto matemático en específico. De acuerdo con Benites (2013) se evidencia una enseñanza de las matemáticas caracterizada por el seguimiento de reglas y procedimientos a partir de una buena lectura de los conceptos matemáticos y ejercitación mediante la cual el estudiante debe adquirir la destreza y dominio de los mismos. El docente destaca la importancia de los teoremas fundamentales pues estos permiten calcular integrales sin recurrir a las sumas de Riemann, y añade "cuando terminemos la definición de integral definida veremos que tiene muchas representaciones o aplicaciones como áreas, volúmenes, centros de masa, puntos de inercia, etc." El profesor hace un enlace de la clase anterior a la actual mediante dos ejercicios que

<table>
<tr>
<td>



Para la sesión actual el docente saluda a sus estudiantes y les pregunta sobre dudas que puedan haber tenido con los ejercicios de integración de acuerdo con las dos partes del teorema fundamental del Cálculo vistos en la clase anterior. Paso siguiente rememora el teorema con dos ejemplos:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int_0^1 x = F(1) - F(0) = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

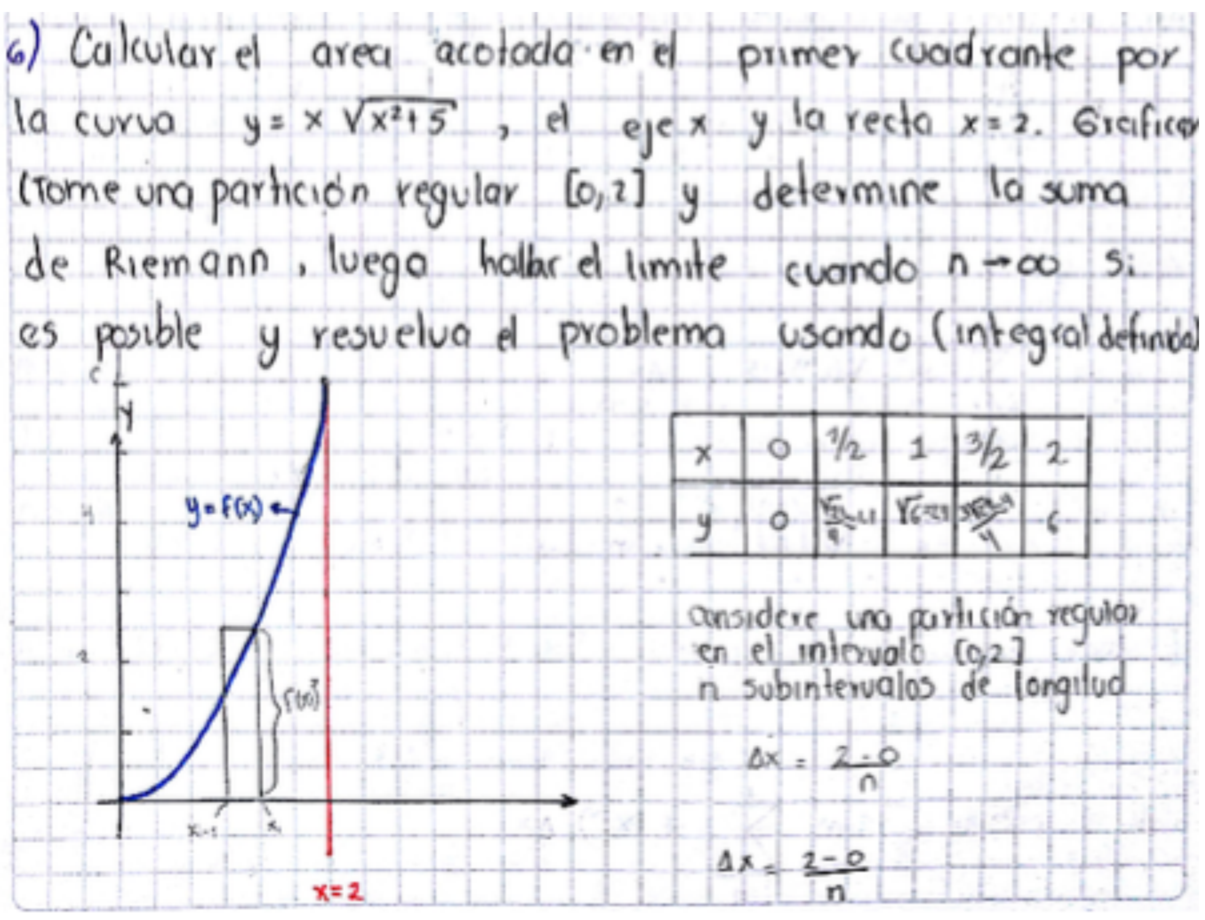
</td>
<td>

ilustran el algoritmo de integración, para este caso un ejemplo de antiderivación y otro de integración definida que ponen de manifiesto la importancia del dominio conceptual que enfatiza el docente.

</td>
</tr>
<tr>
<th>Descripción (Sesión 3)</th>
<th>Argumento (visión del etnógrafo)</th>
</tr>
<tr>
<td>

Después de realizar algunos ejercicios de evaluación de integrales, el docente plantea un ejemplo de área bajo la curva, para lo cual solicita a sus estudiantes determinar la suma de Riemann con una partición regular y luego resolver el problema usando integral definida:

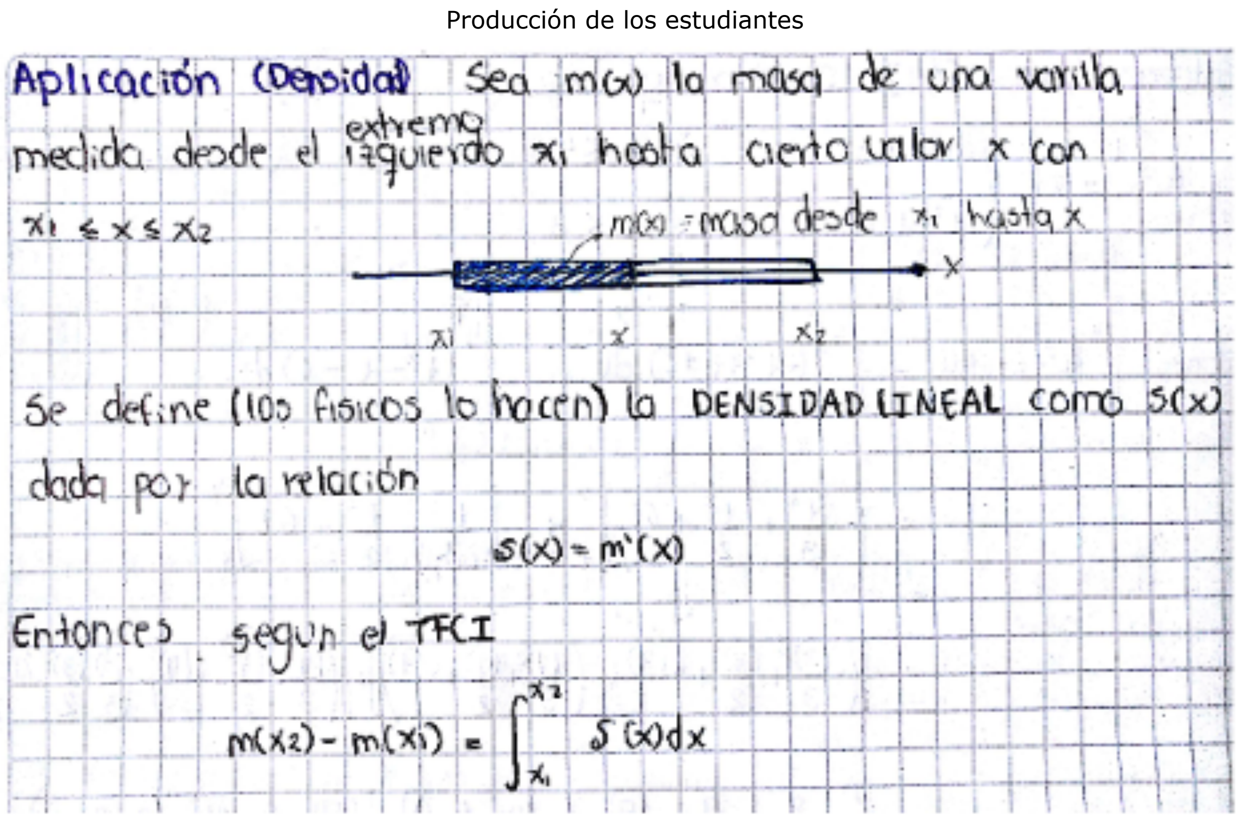
Figura 5
Producción de los estudiantes



A continuación, el docente presenta a sus estudiantes una “aplicación” de la integral definida “desplazamiento o cambio de posición de una partícula” y realiza un ejemplo.

Paso siguiente el profesor expone una definición que nombra como otra aplicación:

Figura 6
Producción de los estudiantes



</td>
<td>

El docente mediante este ejemplo ilustra el paralelo que existe entre resolver el problema de área bajo la curva mediante sumas de Riemann y el uso del último teorema visto (teorema fundamental del cálculo); mediante la aproximación de la suma de Riemann los estudiantes evidencian que el proceso de resolver el problema se hace con una suma finita de particiones (que representan áreas) y que al tomar el limite cuando la parición tiende a cero puedo hallar el área exacta. Posteriormente el profesor plantea el problema por el método de integración definida y enfatiza que es fundamental que se vea el proceso mediante el cual el límite de una suma de Riemann representa una integral definida.

El profesor después de exponer problemas de área bajo la curva que ilustran la utilización de integrales definidas, afirma que se estudiarán aplicaciones que requieren del uso de integrales, estas aportan desde diferentes situaciones, un contexto de lo que significa resolver una integral (Aldana y González, 2016); (Aldana, 2011). El docente parte de un ejemplo del contexto físico para relacionar el objeto matemático con su aplicación desde otra disciplina, este ejemplo es resuelto en clase.

En congruencia con lo anterior, el profesor plantea otro ejemplo también relacionando el uso del objeto matemático en cuestión con una aplicación física, para este caso el cómo está definida la Densidad Lineal en términos de una integral definida.

</td>
</tr>
</table>

Fuente: López-Leyton, Aldana y Erazo (2018)

Además de lo anterior, junto con el desarrollo de clase de los cursos, es evidente que en el trasfondo de cualquier modelo de enseñanza de las matemáticas existe una filosofía de las matemáticas que permea su práctica pedagógica y conforman un sistema de creencias (Benítez, 2013). A continuación, se presentan las tendencias encontradas de acuerdo con algunas preguntas de la entrevista semiestructurada:

Tabla 2

Entrevista semiestructurada

DESCRIPCIÓN:	
Dado que la finalidad de la entrevista gira en torno a conocer el pensamiento del profesor respecto a su modelo de enseñanza del Cálculo Integral, así como su postura frente al papel de la resolución de problemas, se muestran las tendencias del docente por medio de algunas preguntas conductoras.	
TENDENCIA:	
¿Considera usted que relaciona los conceptos matemáticos a situaciones de la vida real? ¿Cómo lo hace?	*"El alcance real de tales aproximaciones está en función del nivel intelectual de estudiantes y maestro"* *"En general, los profesores de matemáticas no tienen una formación muy amplia en otras disciplinas, y se recurre a «ejemplos de libro» para dar respuesta a esa necesidad de realidad que tienen los cursos. Adicionalmente, los libros de texto usados comúnmente en los cursos de cálculo incluyen en sus secciones de ejercicios numerosas aplicaciones y situaciones problema que permiten abordar un amplio rango de realidad (teóricamente hablando y de manera muy general)"*
¿Qué aspectos sobre el planteamiento y la resolución de problemas le han permitido estructurar su práctica educativa?	*"La resolución de problemas en los cursos de y CI en la Licenciatura en Matemáticas es una tarea difícil de alcanzar.* *En general no se proponen y mucho menos resuelven problemas a este nivel"* *"El mayor nivel al que se accede, es al estudio de situaciones problema previamente diseñadas y estudiadas en otras fuentes (como los libros de texto) y que le brindan al estudiante la posibilidad de pensar en diferentes formas de usar los conceptos aprendidos aplicados a diferentes áreas del conocimiento"* *"La formulación y resolución de problemas relacionados con cálculo, se alcanza en la ejecución de algunos de los trabajos de grado"*
En su opinión ¿Para qué sirve resolver un problema de matemáticas en el aula de clase?	*"En mi opinión en una clase de CI no se formulan ni resuelven problemas".* *"No comparto la posición de otros profesores que manifiestan que resolver un ejercicio es resolver un problema, o que hacer una demostración es resolver un problema, o que usar los conceptos de derivada para hallar la aceleración o la velocidad de una partícula que se mueve es resolver un problema. Considero que esos son meros ejercicios usados para que el estudiante incorpore un lenguaje, unos conceptos y unos procesos que seguramente son fundamentales en su formación y futuro desempeño, pero no son resolver un problema."*

Fuente: Elaboración propia

En función de la sesión abordada, los referentes teóricos de apartados anteriores y las temáticas evidenciadas, es posible situar el desarrollo de clase a la luz de la bibliografía encontrada. A partir de ello se constata, que el profesor concibe la resolución de problemas como habilidad (Stanic y Kilpatrick, 1989), es decir, después de un estudio conceptual a profundidad en el cual se desarrollan definiciones, teoremas y demostraciones, el docente plantea ejercicios de práctica y problemas de habilidades básicas que posteriormente se reflejan en una "aplicación", lo anterior de acuerdo con Barrantes (2008); Bedoya y Ospina (2014) evidencia que la postura que toma el docente en el desarrollo en sus clases consiste en resolver problemas a partir de un aprendizaje conceptual (López, Aldana, y Ossa, 2017).

Durante la entrevista semiestructurada se revelan aspectos del pensamiento del profesor como; la mejor estrategia de enseñanza surge englobando todas las temáticas, desde el momento que se habla de antiderivación estar recordando que el tema de antiderivada se requiere para lo que viene, efectivamente cuando se ve notación sigma se destaca nuevamente la importancia de la antiderivadación. Para el caso de la notación sigma, se debe destacar su importancia, puesto que permite comprender porque la integral definida es un número real que se obtiene de calcular el límite de una suma de Riemann. De ahí, se plantean problemas de aplicación como desplazamiento de partículas, centros de densidad, o crecimientos poblacionales que se resuelven con integrales definidas que despiertan el interés del estudiante.

En conclusión, según la información obtenida del pensamiento del profesor, lo primero que tiene que hacer un estudiante es conceptualizar, cuando tiene claro el concepto entonces una forma de verificarlo es enfrentarse a diferentes tipos de ejercicios y problemas en contextos situados de aprendizaje, para los cuales debe recurrir al planteamiento o construcción de una ecuación. La resolución de problemas tiene su momento posterior al proceso institucionalización de un concepto, aquí el estudiante observa que lo que está estudiando tiene una aplicación y permite resolver problemas de otras ciencias. Es decir, por la forma cómo el profesor realiza las prácticas matemáticas en el aula, hace que el estudiante pueda inferir que la RP hace parte del tema estudiado, que viene después de haber visto definiciones, demostraciones y solución de algunos ejercicios que siguen ciertas reglas procedimientos, propiedades y por último aplicaciones mediante la RP, entendida esta, como traducciones del lenguaje escrito a un proceso de modelación que va de lo verbal a la representación o translación a un registro algebraico, pero no hay consciencia del sentido que adquiere la RP en el contexto de un aprendizaje situado, en tanto, que la construcción social del conocimiento y la reconstrucción del discurso matemático se fundamentan en una epistemología contextual, lo cual implica la resignificación de hechos históricos, culturales, situaciones socialmente compartidas de las que emergen los conceptos matemáticos, comprensiones de su realidad y tipos de prácticas matemáticas como la misma RP.

4. Conclusiones

Las concepciones que tienen los profesores sobre la RP en la enseñanza del Cálculo Integral, están ligadas desde el aspecto teórico a la forma de organizar la enseñanza de un concepto o entidad matemática, a partir de ello se configura la Tabla 3 que presenta las concepciones encontradas, así como aquellos obstáculos epistemológicos que las componen:

Tabla 3
Las concepciones que tienen los profesores sobre la RP

Concepciones de los profesores sobre la RP	Obstáculos epistemológicos
1. La RP está ligada netamente desde el aspecto teórico y de contenido **2.** A la hora de enseñar, el proceso de RP depende de la fenomenología del objeto matemático. **3.** La RP en el aula en el marco de la licenciatura en matemáticas como paso del lenguaje verbal a otros tipos de representación **4.** La RP es un proceso que tiene lugar después de haber visto una teoría, un teorema, una demostración, enunciado, axioma o postulado. **5.** El docente universitario concibe la matemática como una articulación entre aprendizaje-saber-enseñanza; triada en la cual la RP adquiere el papel de	**1.** Confusión en la práctica de la RP dado el significado de ejercicio, problema y situación problema. **2.** La RP **no** constituye el punto de partida de una enseñanza problémica de la cual emerge un concepto matemático concreto. **3.** El sentido y significado en contextos de aprendizaje situados para los objetos matemáticos del conocimiento tienen lugar cuando se comprenden las definiciones, antes **no** es posible. **4.** Las prácticas educativas y la misma RP, se ligan a la formación y experiencia profesional, más que a un proceso consciente de la necesidad de cambiar las formas de enseñanza.

motivación en el aula. **6.** La RP viene después de la conceptualización del objeto matemático, tiene existencia cuando hay un contexto, existe si hay una aplicación a la matemática o a otras ciencias. **7.** Para una licenciatura en particular la RP no puede ser el eje vertebral del aprendizaje, debe prevalecer la estructura matemática. **8.** Es posible plantear la RP únicamente en procesos investigación como componente didáctico-instruccional.	**5.** Los profesores consideran que los estudiantes deben formar unas bases sólidas en matemáticas formales, para después profundizar en algún campo especifico, pero la RP es una situación posterior al aprendizaje conceptual. **6.** El uso y/o dificultades que tienen los profesores al enseñar matemáticas mediante de la RP deja claro que no existe coherencia entre lo que se plantea de manera institucional en ideal educativo y lo que el docente hace en su papel de orientador.

Fuente: Elaboración propia

A partir de estas conclusiones se presenta una acción mejoradora para la resolución de problemas como estrategia de aprendizaje apoyada en el Enfoque Ontosemiótico y la instrucción matemática de Godino, Batanero y Font (2009) y adaptada por los investigadores.

4.1. Acción mejoradora

Tabla 4
Análisis Didáctico en Resolución de Problemas (ADIRESPRO)

<table>
<tr><th colspan="2">SITUACIÓN EN UN CONTEXTO MATEMÁTICO</th></tr>
<tr><td colspan="2">Calcular el área limitada por la gráfica de la función *f(x)*=|2x-1|en el intervalo [0,2] y el eje *x*. Justificar la respuesta (Aldana, 2011, 2016).</td></tr>
<tr><td>TIPOS DE OBJETOS</td><td>SIGNIFICADOS (relación de referencia o de uso)</td></tr>
<tr><td colspan="2">ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Uso de representaciones gráficas, tabulares, numéricas, algebraicas, analíticas y otros lenguajes)</td></tr>
<tr><td>Calcular área
Gráfica de la función
Eje x
Justificar</td><td>Hallar el valor de una superficie
Representación gráfica
Expresión de una función valor absoluto
Intervalo cerrado
Plano cartesiano
Argumentar</td></tr>
<tr><td colspan="2">CONCEPTOS (Entidades matemáticas para formular una definición)</td></tr>
<tr><td>Área
Función
Valor absoluto</td><td>Cantidad en unidades cuadradas
Regla que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo conjunto.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROCEDIMIENTOS (Técnicas utilizadas, operaciones, algoritmos)</td></tr>
<tr><td>- Definición del valor absoluto dado.
- Representación tabular
- Representación gráfica
- Cálculo del área mediante la integral definida
-Cálculo del área mediante la definición del área del triángulo</td><td>- Aplicación de la definición de valor absoluto para encontrar los límites de la integral definida.
-Representación gráfica a partir de una tabulación.
-Aplicación del teorema fundamental del cálculo
- Definición del área del triángulo</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROPIEDADES (Enunciados para justificación o prueba)</td></tr>
<tr><td>- P1: Despeje de ecuaciones
- P2: Puntos críticos
- P3: Positividad del área
- P4: Suma de Fracciones
- P5: Ley de extremos y medios</td><td>- Ceros de la ecuación
- Función creciente y decreciente
- Definición de área
- Propiedades de las fracciones
-Definición de la propiedad fundamental de las proporciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)</td></tr>
<tr><td>1. P1
2. P2
3. P3
4. Teorema fundamental del Cálculo
5. P4
6. P5.</td><td>Despeje de ecuaciones
Utiliza los puntos críticos para buscar pares ordenados
Análisis grafico de concepto de área de un triángulo
Definición del teorema fundamental
Suma de fracciones
Propiedad fundamental de las proporciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">RESOLUCIÓN DE LA SITUACIÓN PROBLEMA
Figura 7: Solución dada por un estudiante</td></tr>
</table>

Fuente: Aldana y González (2016, p. 10, 11)
CONFLICTOS POTENCIALES
1. Confunden la función valor absoluto con la función lineal.
2. Falta de coordinación entre la representación gráfica y la algebraica.
3. Manejo inadecuado de las desigualdades como conceptos previos.
4. Ausencia de dominio para usar la definición de la función valor absoluto, y no pueden aplicar la propiedad aditiva de la integral.
5. Dificultad para determinar los límites de integración de la función que van a integrar.
6. Inexactitud para aplicar la propiedad aditiva de la integral definida.

Fuente: Adaptación de los autores de esta investigación

Como puede notarse en la tabla anterior se trata de una configuración epistémica que da cuenta de una de las teorías pioneras en didáctica de las matemáticas llamada el Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2009).

Las teorías en didáctica de la matemática coinciden en situar la RP como uno de los mecanismos para el desarrollo, la comprensión, y construcción del conocimiento matemático a partir de situaciones problemas que dan sentido y significado a las estructuras matemáticas.

Es de resaltar que esta acción mejoradora resultado del estudio etnográfico realizado en esta investigación a nivel universitario permite a los docentes de este nivel hacer configuraciones epistémicas a partir del reconocimiento del lenguaje, los sistemas de representación, propiedades, definiciones, axiomas, postulados y procesos matemáticos para consolidar una postura argumentativa que ponga en juego las demandas lógicas del estudiante en esa triada de saberes, aplicaciones y contexto de uso de los objetos matemáticos del conocimiento, pero lo relevante, son los múltiples significados que adquieren los objetos matemáticos estudiados, porque surgen de *situaciones problema* que van de manera articulada y coordinada reconociendo elementos lingüísticos, conceptos/ definiciones, propiedades, procedimientos, y argumentos, y cómo en cada uno, va tomando el con concepto su propio significado, según el rol establecido en cada función semiótica.

Referencias bibliográficas

Aldana, E. (2011). Comprensión del concepto de Integral Definida en el marco de la teoría “APOE”. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca. Salamanca, España.

Aldana, E. y González, M. T. (2016). La función valor absoluto y el desarrollo del esquema de la integral definida. Artículo de investigación Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC) ISSN 1850-6666. Volumen 11 No 1 Mes Julio, pp. 8-17.

Ávila-Storer, A. (2004). Reseña de conocimientos y aptitudes para la vida. Resultados de pisa 2000. Educación Matemática, 16 (1), 225-227.

Barrantes Campos, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense. CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA 2008, Año 3, Número 4, pp. 83-98. Recuperado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6902/6588

Bedoya Echavarría, M. M. y Ospina Sánchez, S. A. (2014). Concepciones que poseen los profesores de matemática sobre la resolución de problemas y cómo afectan los métodos de enseñanza aprendizaje. Tesis de maestría. Universidad de Medellín, Medellín – Antioquia, Colombia. Recuperado de http://repository.udem.edu.co/bitstream/handle/11407/300/Concepciones%20que%20poseen%20los%20profesores%20de%20matem%C3%A1tica%20so sequence=1

Benítez Mojica, D. y Londoño Millán, N. (2009) Situaciones Problemáticas en Contexto en el Aprendizaje del Cálculo. El Cálculo y su Enseñanza. Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F.

Benítez Chará, W. (2013). Concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje de docentes en formación. Revista Científica, 0, 176 - 180. Recuperado de http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/6009

Bisquerra, R. et al. (2009). Metodología de la investigación educativa. Barcelona, España: Editorial La Muralla, 2da edición. ISBN: 978-84-7133-748-1.

Blanco, L.J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. Épsilon n. 25. Sevilla. 49-60.

Búrquez, K., Domínguez, R., Vera, J. A. (2005). Modelo de formación para docentes que laboran en escuelas multigrado: propuesta de innovación educativa. Revista Desencuentros, 5 (11), 29-64.

Contreras, L y Carrillo, J. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. Educación Matemática, 17(3), 79-92.

Cortés, J, y Sanabria, F. (2012) Concepciones y Creencias de Profesores de Matemáticas sobre Resolución de Problemas: un estudio de casos. Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia

Ezpeleta, J. (2004). Innovaciones educativas. Reflexiones sobre los contextos para su implementación. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 9(21), 403-424.

Flores, P. (1998). Libro Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Universidad de Granada, departamento de didáctica de la matemática, España. (pp. 30)

García, Luis, Azcárate, Carmen, y Moreno, Mar. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9(1), 85-116. Recuperado en 16 de abril de 2017, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362006000100005&lng=es&tlng=es

Gil-Cuadra, F y Rico Romero L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Enseñanza de las ciencias, 21 (1), 27-47.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2009). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.

González, J., y Hernández, Z. (2003). Paradigmas Emergentes Y Métodos De Investigación en el Campo de la Orientación.

Llinares, S. (1991). La Formación de profesores de matemáticas. Sevilla: GID.

López, C., Aldana, E., & Ossa, Á. (2017). Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas como estrategia de aprendizaje de los conceptos de cálculo diferencial e integral.

López-Leyton, C., Aldana, E., y Erazo, J. (2018). Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas en cálculo diferencial e integral. [Conceptions of teachers on the resolution of problems for the teaching of concepts of differential and integral calculus: ethnographic study]. Revista Logos Ciencia & Tecnología, 10(1), 145-157.

Moreno, M. y Azcárate Giménez, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las educaciones diferenciales. Enseñanza de las Ciencias, 21 (2), 265-280.

Murillo, J y Martínez, C (2010). Investigación etnográfica, métodos de investigación educativa. Pág. 09.

Pólya, G. (1954). How to solve it, Princeton:Princeton University Press.

Sabariego, M. (2009). La Investigación Educativa: Génesis, Evolución y Características. En R. Bisquerra (Coord.). Metodología de la Investigación Educativa (2ª ed.). (50-87). Madrid: La Muralla.

Santos T. L. M. y Vargas, C. (2003) Mas allá del uso de exámenes estandarizados. Avance y Perspectiva 22, pp. 9-22.

Santos T. L.M (2007). Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. Mexico, DF: Trillas.

Schmelkes, S. (2001). Cambiar la escuela rural. Evaluación cualitativa del Programa para Abatir el Rezago Educativo, PARE. Revista Mexicana de investigación Educativa, 6(11), 173-179.

Serrano, R. C. (2010). Pensamientos del profesor: un acercamiento a las creencias y concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en la

Educación Superior. Revista de Educación, 352, 267-287.

Stanic, G. y Kilpatrick, J.(1989), Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles&Silver (Eds.) The teaching and assesing of mathematical problem solving, pp.1-22 Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shulman, L. S. (1986). "Paradigms and Research Programs for the Study of Teaching". En M. C. Wittrock (Ed.). Handbook of Research on Teaching. New York: Macmillan, 3ra. ed., p. 3-36.

---

1. Licenciado en Matemáticas, Universidad del Quindío. Contacto: leyton3991@gmail.com . Orcid: https://orcid.org/0000-0001-7335-2339

2. Doctor en Educación Matemática, Universidad de Salamanca, España. Magister en Administración de la Educación, Énfasis en Dirección, Universidad del Valle. Licenciado en Matemáticas, Universidad del Quindío. Bachiller Pedagógico, Normal Nacional Integrada de Ibagué. Líder del grupo de investigación GEMAUQ. Filiación: Universidad del Quindío. Contacto: eliecerab@uniquindio.edu.co . Orcid: https://orcid.org/0000-0003-1691-2699

3. Magister en Ciencias de la Educación, Universidad del Quindío. Licenciado en Matemáticas, Universidad del Quindío. Docente investigador adscrito al grupo de investigación GEMAUQ. Filiación: Universidad del Quindío. Contacto: jderazo@uniquindio.edu.co . Orcid: https://orcid.org/0000-0002-0036-4264
