ISSN 0798 1015

REVISTA ESPACIOS

EDUCACIÓN • EDUCAÇÃO • EDUCATION Vol. 38 (Nº 60) Año 2017. Pág. 4

Programação linear: método de otimização simplex e software OTIMIZA

Linear Programming: Simplex Method and software OTIMIZA

MANSILHA, Marcio B. 1; FARRET, Felix A. 2; KULLMANN, Deise H. 3

Recibido: 10/08/2017 • Aprobado: 05/09/2017

Conteúdo

RESUMO:
Neste artigo apresentamos o método simplex. É feita uma explanação sobre o método simplex e programação linear. Por fim, um de problema de programação linear é resolvido através do método simplex detalhadamente e os resultados são comparados aos obtidos usando-se um software de programação linear, mostrando que os resultados fornecidos são iguais. Ainda, os resultados obtidos através do método simplex são comparados aos obtidos através do método gráfico, mostrando que as soluções encontradas correspondem aos vértices do método gráfico.
Palavras-chave: método simplex, programação linear, método gráfico, software OTIMIZA.

ABSTRACT:
In this article we present the simplex method. An explanation is made on the simplex method and linear programming. Finally, a linear programming problem is solved through the simplex method in detail and the results are compared to those obtained using linear programming software, showing the results provided. The results obtained through the simplex method are compared to those obtained through the graphical method, showing that the solutions found correspond to the vertices of the graphical method
Keywords: Simplex method, linear programming, graphic method, software OTIMIZA

1. Introdução

A Programação Linear (PL) é talvez o problema de otimização mais importante e bem estudado. Problemas do mundo real podem ser formulados como problemas de programação linear. A PL é o processo de minimizar ou maximizar a função objetivo linear a uma série de igualdades e desigualdades de restrições lineares. O algoritmo simplex é o método mais utilizado para a resolução de problemas de programação linear (PLOSKAS; SAMARAS, 2015). O Método simplex (Dantzig) para programação linear foi criado por George Dantzig em 1947. O sucesso do algoritmo levou a uma vasta gama de especializações e generalizações que têm dominado a pesquisa de operações práticas desde então (DANTZIG; THAPA, 2003),(NEZAMABADI; VAHIDINASAB, 2015)(NASH, 2000),(SOUSA, 2005). O Método simplex é um procedimento matricial para resolver o modelo de programação linear na forma normal. Refere-se a família dos métodos de otimização globais, conhecidos como métodos de procura direta (DAVOODI; HAGH; ZADEH, 2014). Os recentes avanços de hardware tornaram possível resolver problemas de PL em grande escala em um curto espaço de tempo. Unidades de Processamento gráfico (GPUs) ganharam muita popularidade e têm sido aplicados para algoritmos lineares de programação (PLOSKAS; SAMARAS, 2015).

Na próxima seção será apresentada a formulação para o problema de PL. Na terceira seção deste artigo é apresentada a metodologia por trás do método simplex.

Após, é apresentado um exemplo resolvido passo a passo pelo método simplex e seus resultados são comparados aos obtidos utilizando-se o software otimiza.

1.1. Programação linear

O problema de programação linear consiste de um problema de otimização, ou seja, consiste na alocação de recursos limitados a atividades em competição, de forma ótima.

A forma matemática clássica de apresentação do problema de programação linear é a seguinte:

$$\max/\min\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Sujeito as restrições

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\ (\leq = \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\ (\leq = \geq) b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n\ (\leq = \geq) b_m \\ x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots n \end{gathered}$$

Esta formulação recebe o nome de formulação primal de programação linear. Existem algumas características importantes do formato padrão:

- A função objetivo é do tipo *maximizar* ou *minimizar*;
- Todas as restrições são expressas como equações;
- Todas as variáveis são não negativas;
- A constante no lado direito das restrições é não negativa.

Podemos ainda definir este conjunto de equações na sua forma matricial

$$\max/\min\ z = \mathbf{cx}$$

Sujeito as restrições

$$\begin{gathered} \mathbf{Ax}\ (\leq = \geq) \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{gathered}$$

Onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ bx_n \end{bmatrix},$$

$\mathbf{c} = [c_1 \quad \ldots \quad c_n]$.

Com a definição do problema matemático objetiva-se estabelecer relações entre as variáveis para tomada de decisão. Uma vez obtido o modelo linear, constituído pela função objetivo e pelas restrições, a programação linear encontrará a solução ótima. O processo que realiza tal tarefa recebe o nome de Método Simplex.

1.2. Método simplex

Método simplex é um método interativo utilizado para se determinar, numericamente, a solução ótima de um modelo de Programação Linear. Para Ploskas e Samaras (PLOSKAS; SAMARAS, 2014) a escolha do elemento de articulação em cada iteração é um dos passos mais críticos para o algoritmo simplex. A flexibilidade da seleção de variáveis que entram e saem permite desenvolver várias regras de articulação. No trabalho de San e Chen (SAN; CHEN, 2007), é proposto um algoritmo híbrido melhorado-simplex genética (HSIGA), que combina o método simplex (SM) e algoritmo genético (GA) para resolver problemas de otimização numérica globais.

Tan, Chin e Dou (TAN; CHIN; DOU, 2003) em seu artigo utilizam o modelo de sinal de ativação que é identificado através do método de “downhill simplex” multidimensional onde os resultados em tempo real, verificar a eficácia do esquema proposto.

Diversos autores utilizaram o Método Simplex para resolver problemas de engenharia (YAMAMURA; KITAKAWA, 2003), (VELILLA; VALENCIA; MORENO, 2008), dentre outros.

a) Características do Método Simplex

O método simplex só pode ser utilizado na solução de problemas de programação linear se o problema estiver escrito em formato padrão, ou seja,

max/min $z = cx$

Sujeito as restrições

$Ax = b$

$x \geq 0$

$b \geq 0$

Para converter uma inequação em uma equação poderão ser utilizados dois tipos de variáveis:

- Variáveis de folga: são utilizadas para converter uma inequação do tipo “≤” em "=";
- Variáveis de excesso: são utilizadas para converter uma inequação do tipo “≥” em "=".

As características para o sistema linear de equações são(PLOSKAS; SAMARAS, 2014):

- Todas as variáveis são não-negativas:
- Todos os bi’ são não-negativos;
- Todas as equações iniciais do sistema são do tipo " ≤ ". Assim, na forma padrão, só encontra-se variáveis de folga. Se uma das características vistas não ocorrer, então, casos especiais do método devem ser considerados, como o Método Simplex de Duas Fases.

b) Teoremas Fundamentais

- Teorema 1: O conjunto de todas as soluções compatíveis (ou viáveis ou factíveis) do modelo de programação linear é um conjunto convexo.
- Teorema 2: Toda solução básica factível do sistema Ax=b é um ponto extremo do conjunto de soluções compatíveis, isto é, do conjunto convexo C do Teorema 1.
- Teorema 3:

Se a função objetivo possui um máximo (ou mínimo) finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo C do Teorema 1.

Se a função objetivo assume um máximo (ou mínimo) em mais de um ponto extremo, então ele assume o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos extremos.

---

2. Metodologia

Os Passos do Método Simplex, sabe-se que a solução ótima do modelo é uma solução básica do sistema, ou seja, um ponto extremo do polígono gerado pelas restrições. Para iniciarmos o Método Simplex necessita-se de uma solução básica viável inicial, a qual é um dos pontos extremos. Este método verifica se a presente solução é ótima. Se esta não for é porque um dos demais pontos extremos adjacentes (vértices) fornecem valor menor para a função objetivo que a atual, quando o problema considerado é de minimização. Ele então faz uma mudança de vértice na direção que mais diminua a função objetivo e verifica se este novo vértice é ótimo. O processo termina quando, estando num ponto extremo, todos os outros pontos extremos adjacentes fornecem valores maiores para a função objetivo.

Portanto, a troca de vértice, faz uma variável não básica crescer (assumir valor positivo) ao mesmo tempo em que zera uma variável básica (para possibilitar a troca) conservando a viabilidade do Problema de Programação Linear.

Para isso, escolhemos uma variável cujo custo relativo é mais negativo (não é regra geral) para entrar na base e as trocas de vértices são feitas até que não exista mais nenhum custo relativo negativo.

A variável que sairá da base é aquela que, ao se anular, garante que as demais continuem maiores ou iguais a zero quando aumentamos o valor da variável que entra na base (respeitando a factibilidade).

O Método Simplex compreenderá, portanto, os seguintes passos:

i. Achar uma solução factível básica inicial.

ii. Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare. Caso contrário, siga para o passo iii.

iii. Determinar a variável não básica que deve entrar na base;

iv. Determinar a variável básica que deve sair da base;

v. Atualizar o sistema à fim de determinar a nova solução factível básica, e voltar ao passo ii.

A figura 1 a seguir é utilizado para problemas de minimização. Para problemas de maximização, este quadro pode ser usado, desde que os elementos da linha inferior sejam colocados com sinal invertido. Uma vez obtida esta ultima linha do Quadro, a segunda linha e a segunda coluna do Quadro, correspondentes a CT e C0, respectivamente, tornam-se supérfluas e podem ser eliminadas (MOLITERNO, 2016).

Figura 1

Quadro Método Simplex para Minimização.

	X^T C^T	
X_0 C_0	A	B
	$C^T - C_0^T A$	$-C_0^T B$

Onde:

- $\boldsymbol{C^T}$ é o vetor linha dos custos correspondentes;
- $\boldsymbol{X}$ é o vetor coluna de incógnitas (incluindo variáveis de folga, excesso e artificiais);
- $\boldsymbol{A}$ é a matriz de coeficientes das equações de restrições;
- $\boldsymbol{B}$ é o vetor coluna dos valores à direita das equações representando as restrições;
- $\boldsymbol{X_0}$ é o vetor coluna de variáveis de folga e artificiais;

$\boldsymbol{C_0}$ é o vetor coluna de custo associado com as variáveis em $\boldsymbol{X_0}$.

---

3. Resultados

De forma a elucidar o passo a passo de solução de um problema de programação linear, selecionamos o exemplo dado por (KAGAN N. ET AL, 2009). Este consiste de:

"Um produtor independente dispõe de 2 unidades de geração, que podem ser conectadas ao sistema elétrico em pontos distintos, para a venda do excedente de energia elétrica que são capazes de produzir. Tanto os custos de produção quanto as tarifas negociadas para a venda de energia são distintos para os 2 geradores. O produtor deseja vender o máximo possível de energia seguindo, entretanto, seu plano de negócios, que não permite gastar acima de um valor pré-estabelecido para a produção de energia."

Dados do problema:

Tabela 1. Percentuais de Crescimento para Horizonte de 10 anos.

	Gerador 1	Gerador 2
Capacidade de Produção (MWh)	5.000	7.000
Custo de Produção (R$/MWh)	50	100
Tarifa de Venda (R$/MWh)	90	120
Máximo custo de produção total (R$)	800.000	

Escrevendo o problema em forma de inequações, temos o seguinte problema de geração:

$$
\begin{gathered}
Max\ z = 90x_1 + 120x_2 \\
x_1 \leq 5000 \\
x_2 \leq 7000 \\
50x_1 + 100x_2 \leq 80000 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{gathered}
$$

1) Solução pelo Método Simplex

Devemos escrever o problema na forma padrão do método simplex, ou seja, devemos fazer a inclusão das variáveis residuais.

$$
\begin{gathered}
z - 90x_1 + 120x_2 = 0 \\
x_1 + x_3 = 5000 \\
x_2 + x_4 = 7000 \\
50x_1 + 100x_2 + x_5 = 80000 \\
x_1, x_2 \geq 0 \\
x_3, x_4, x_5 \geq 0 \quad variáveis\ residuais
\end{gathered}
$$

Tabelas do Método Simplex (Tableaus)

Adota-se como base inicial as variáveis residuais, ou seja, (x_3, x_4, x_5).
Assim, a solução inicial corresponde a:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 5000$$
$$x_4 = 7000$$
$$x_5 = 800000$$

Com a função objetivo:

$$z = 0$$

Tableau inicial:

Tabela 1. *Tableau* inicial

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Objetivo		1	-90	-120	0	0	0	0
Restrição 1	x_3	0	1	0	1	0	0	5000
Restrição 2	x_4	0	0	1	0	1	0	7000
Restrição 3	x_5	0	50	100	0	0	1	800000

Tabela 2. *Tableau* inicial.

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Objetivo		1	-90	-120	0	0	0	0
Restrição 1	x_3	0	1	0	1	0	0	5000
Restrição 2	x_4	0	0	1	0	1	0	7000
Restrição 3	x_5	0	50	100	0	0	1	800000

Portanto, x_2 entra na base.
A linha com a mínima razão entre (b_i/a_{i2}), com $a_{i2}>0$, é a linha que corresponde a restrição 2.

Tabela 3. *Tableau* inicial.

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Objetivo		1	-90	-120	0	0	0	0
Restrição 1	x_3	0	1	0	1	0	0	5000
Restrição 2	x_4	0	0	1	0	1	0	7000
Restrição 3	x_5	0	50	100	0	0	1	800000

Portanto, x_4 sai da base.

O passo a passo para a realização da pivotação (ou seja, realizando operações algébricas simples sobre a *tableau* para que a coluna da variável x_2, que sai da base, contenha valores nulos a menos de um valor unitário na linha correspondente a variável que sai, linha da restrição 2, neste caso) é dado a seguir:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-90	**-120**	0	0	0	0
x_3	1	**0**	1	0	0	5000
x_4	0	**1**	0	1	0	7000
x_5	50	**100**	0	0	1	800000
		Mais negativo				

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-90	**-120**	0	0	0	0
x_3	1	**0**	1	0	0	5000
x_4	0	**1**	0	1	0	7000
x_5	50	**100**	0	0	1	800000
		Pivô				

Multiplica-se todos os elementos da linha do Pivô, pelo inverso do Pivô.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-90	**-120**	0	0	0	0
x_3	1	**0**	1	0	0	5000
x_4	0*1/1	**1*1/1**	0*1/1	1*1/1	0*1/1	7000*1/1
x_5	50	**100**	0	0	1	800000
		Pivô				

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-90	**-120**	0	0	0	0
x_3	1	**0**	1	0	0	5000
x_4	0	**1**	0	1	0	7000
x_5	50	**100**	0	0	1	800000
		Pivô				

Agora, devemos reduzir a zero o elemento referente a função objetivo de x2, ou seja, o elemento -120. Multiplica-se por 120 a linha que contem o Pivô, em seguida faça uma soma algébrica com a linha que contem o elemento -120.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0*120-90	**1*120-120**	**0*120+**0	1***120+**0	**0*120+**0	7000 ***120** +0
x_3	1	**0**	1	0	0	5000
x_4	0	**1**	0	1	0	7000
x_5	50	**100**	0	0	1	800000

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-90	**0**	0	120	0	840000
x_3	1	**0**	1	0	0	5000
x_4	0	**1**	0	1	0	7000
x_5	50	**100**	0	0	1	800000

Devemos reduzir a zero o elemento referente a x_5 da coluna de x_2, ou seja, o elemento 100. Multiplica-se por -100 a linha que contem o pivô, em seguida faça uma soma algébrica com a linha que contem o elemento 100.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-90	**0**	0	120	0	840000
x_3	1	**0**	1	0	0	5000
x_4	0	**1**	0	1	0	7000
x_5	0*(-100)+50	1*(-100)+**100**	0*(-100)+0	1*(-100)+0	0*(-100)+1	7000*(-100)+800000

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-90	**0**	0	120	0	840000
x_3	1	**0**	1	0	0	5000
x_4	0	**1**	0	1	0	7000
x_5	50	**0**	0	-100	1	100000

Por fim, temos que nova *Tableau*, com nova base (x_3, x_2, x_5):

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Objetivo		1	-90	0	0	120	0	840000
Restrição 1	x_3	0	1	0	1	0	0	5000
Restrição 2	x_2	0	0	1	0	1	0	7000
Restrição 3	x_5	0	50	0	0	-100	1	100000

Assim, a solução nesta base corresponde a:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 7000$$
$$x_3 = 5000$$
$$x_4 = 0$$
$$x_5 = 100000$$

Com a função objetivo

$$Z = 840000$$

Tableau 2:

Neste tableau, a coluna da variável não básica com menor coeficiente negativo na linha da função objetivo é a correspondente a variável x_1.

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Objetivo		1	-90	0	0	120	0	840000
Restrição 1	x_3	0	1	0	1	0	0	5000
Restrição 2	x_2	0	0	1	0	1	0	7000
Restrição 3	x_5	0	50	0	0	-100	1	100000

Portanto, x_1 entra na base.

A linha com a mínima razão entre (b_i/a_{i1}), com $a_{i1}>0$ é a linha que corresponde a restrição 3.

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Objetivo		1	-90	0	0	120	0	840000
Restrição 1	x_3	0	1	0	1	0	0	5000
Restrição 2	x_2	0	0	1	0	1	0	7000
Restrição 3	x_5	0	50	0	0	-100	1	100000

Portanto, x5 sai da base.
Pivotação:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-90	0	0	120	0	840000
x_3	**1**	0	1	0	0	5000
x_2	**0**	1	0	1	0	7000
x_5	**50**	0	0	-100	1	100000

Multiplicando todos os elementos da linha do Pivô, pelo inverso do Pivô:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-90	0	0	120	0	840000
x_3	**1**	0	1	0	0	5000
x_2	**0**	1	0	1	0	7000
x_5	**50*1/50**	0*1/50	0*1/50	-100*1/50	1*1/50	100000*1/50

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-90	0	0	120	0	840000
x_3	**1**	0	1	0	0	5000
x_2	**0**	1	0	1	0	7000
x_5	**1**	0	0	-2	1/50	2000

Reduzindo a zero o elemento -90: Multiplica-se por 90 a linha que contem o Pivô, em seguida faça uma soma algébrica com a linha que contem o elemento -90.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1*90-90	0*90+0	0*90+0	-2*90+120	1/50*90+0	2000*90+840000
x_3	**1**	0	1	0	0	5000
x_2	**0**	1	0	1	0	7000
x_5	**1**	0	0	-2	1/50	2000

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	0	-60	9/5	1020000
x_3	**1**	0	1	0	0	5000
x_2	**0**	1	0	1	0	7000
x_5	**1**	0	0	-2	1/50	2000

Reduzindo a zero o elemento 1: Multiplica-se por -1 a linha que contem o Pivô, em seguida faça uma soma algébrica com a linha que contem o elemento 1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	0	-60	9/5	1020000
x_3	**1*(-1)+1**	0*(-1)+0	0*(-1)+1	(-2)*(-1)+0	1/50*(-1)+0	2000*(-1)+5000
x_2	**0**	1	0	1	0	7000
x_5	**1**	0	0	-2	1/50	2000

%

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	0	-60	9/5	1020000
x_3	**0**	0	1	2	-1/50	3000
x_2	**0**	1	0	1	0	7000
x_5	**1**	0	0	-2	1/50	2000

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	0	-60	9/5	1020000
x_3	0	0	1	2	-1/50	3000
x_2	0	1	0	1	0	7000
x_1	1	0	0	-2	1/50	2000

A nova Tableau, com nova base (x_3, x_2, x_1)

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Objetivo		1	0	0	0	-60	9/5	1020000
Restrição 1	x_3	0	0	0	1	2	-1/50	3000
Restrição 2	x_2	0	0	1	0	1	0	7000
Restrição 3	x_1	0	1	0	0	-2	1/50	2000

Assim, a solução nesta base corresponde a:

$$x_1 = 2000$$
$$x_2 = 7000$$
$$x_3 = 3000$$
$$x_4 = 0$$
$$x_5 = 0$$

Com a função objetivo

$$Z = 1020000$$

Tableau 3:

Na última *tableau*, a coluna da variável não básica com menor coeficiente negativo na linha da função objetivo é a correspondente a variável x_4.

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Objetivo		1	0	0	0	-60	9/5	1020000
Restrição 1	x_3	0	0	0	1	2	-1/50	3000
Restrição 2	x_2	0	0	1	0	1	0	7000
Restrição 3	x_1	0	1	0	0	-2	1/50	2000

Portanto, x_4 entra na base.
A linha com a mínima razão entre (b_i/a_{i4}), com $a_{i4}>0$ é a linha que corresponde a restrição 1.
Portanto, x_3 sai da base.
Pivotação:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	0	**-60**	9/5	1020000
x_3	0	0	1	**2**	-1/50	3000
x_2	0	1	0	**1**	0	7000
x_1	1	0	0	**-2**	1/50	2000

Multiplicando todos os elementos da linha do Pivô, pelo inverso do Pivô.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	0	**-60**	9/5	1020000
x_3	0*1/2	0*1/2	1*1/2	**2*1/2**	-1/50*1/2	3000*1/2
x_2	0	1	0	**1**	0	7000
x_1	1	0	0	**-2**	1/50	2000

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	0	-60	9/5	1020000
x_3	0	0	1/2	1	-1/100	1500
x_2	0	1	0	1	0	7000
x_1	1	0	0	-2	1/50	2000

Reduzindo a zero o elemento -60: Multiplica-se por 60 a linha que contem o Pivô, em seguida faça uma soma algébrica com a linha que contem o elemento -60.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0*60+0	0*60+0	½*60+0	1*60-60	-1/100*60+9/5	1500*60+1020000
x_3	0	0	1/2	1	-1/100	1500
x_2	0	1	0	1	0	7000
x_1	1	0	0	-2	1/50	2000

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	30	0	6/5	1110000
x_3	0	0	1/2	1	-1/100	1500
x_2	0	1	0	1	0	7000
x_1	1	0	0	-2	1/50	2000

Reduzindo a zero o elemento -2: Multiplica-se por +2 a linha que contem o Pivô, em seguida faça uma soma algébrica com a linha que contem o elemento -2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	30	0	6/5	1110000
x_3	0	0	1/2	1	-1/100	1500
x_2	0	1	0	1	0	7000
x_1	0*2+1	0*2+0	½*2+0	1*2-2	-1/100*2+1/50	1500*2+2000

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	30	0	6/5	1110000
x_3	0	0	1/2	1	-1/100	1500
x_2	0	1	0	1	0	7000
x_1	1	0	1	0	0	5000

Reduzindo a zero o elemento 1: Multiplica-se por -1 a linha que contem o Pivô, em seguida faça uma soma algébrica com a linha que contem o elemento 1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	30	0	6/5	1110000
x_3	0	0	1/2	1	-1/100	1500
x_2	0*(-1)+0	0*(-1)+1	1/2*(-1)+0	1*(-1)+1	-1/100*(-1)+0	1500*(-1)+7000
x_1	1	0	1	0	0	5000

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	30	0	6/5	1110000
x_3	0	0	1/2	1	-1/100	1500
x_2	0	1	-1/2	0	1/100	5500
x_1	1	0	1	0	0	5000

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	30	0	6/5	1110000
x_4	0	0	1/2	1	-1/100	1500
x_2	0	1	-1/2	0	1/100	5500
x_1	1	0	1	0	0	5000

A nova *Tableau*, com nova base (x_4, x_2, x_1):

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Objetivo		1	0	0	30	0	6/5	1110000
Restrição 1	x_4	0	0	0	1/2	1	-1/100	1500
Restrição 2	x_2	0	0	1	-1/2	0	1/100	5500
Restrição 3	x_1	0	1	0	1	0	0	5000

Nesta Tableau pode-se perceber que todos os coeficientes da função objetivo são todos maiores ou iguais a zero. A condição de otimalidade é satisfeita com:

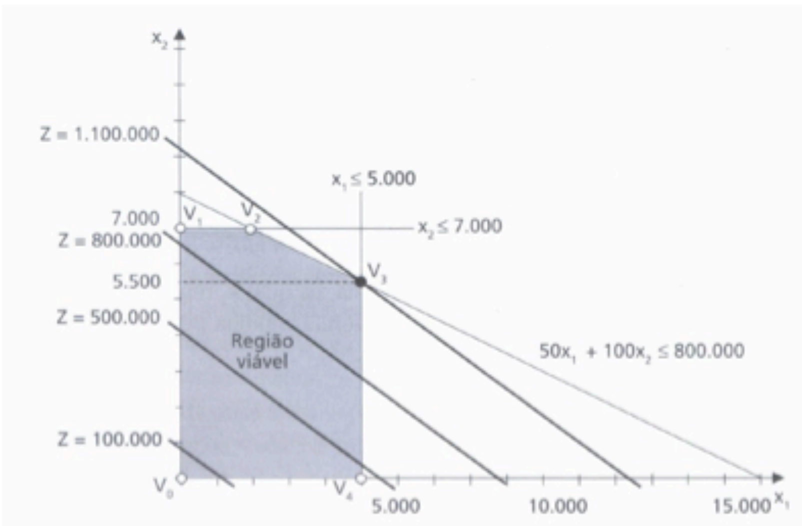
$$x_1 = 5.000$$
$$x_2 = 5.500$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 1.500$$
$$x_5 = 0$$

Com a função objetivo

$$Z = 1.110.000$$

Esta solução pode ainda ser comparada a solução encontrada através do método gráfico, mostrada na Figura 2 abaixo.

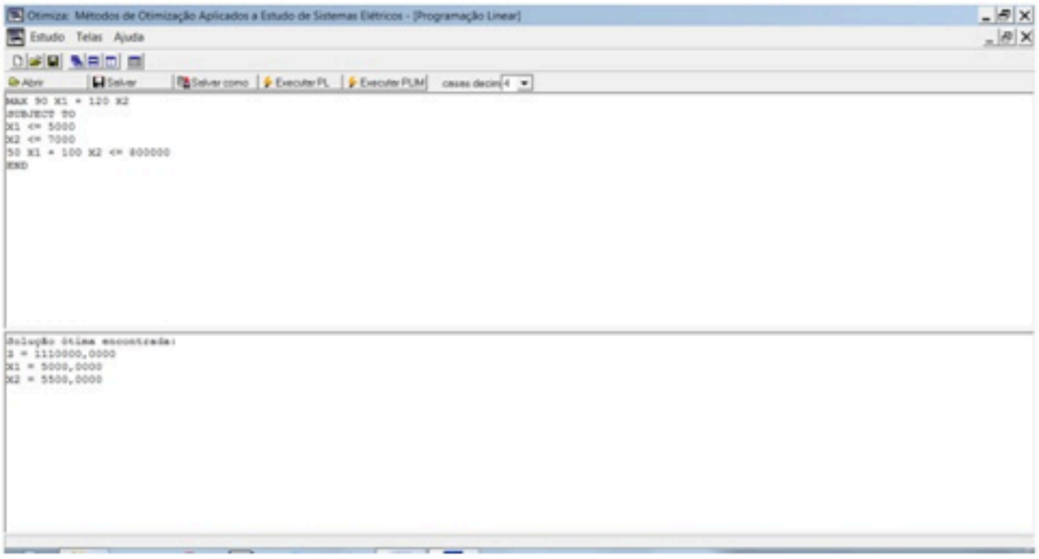
Figura 3. Solução Gráfica.



Solução através do software otimiza

O Software OTIMIZA (KAGAN N. ET AL, 2009) é um software didático com aplicação de técnicas de otimização a problemas de engenharia de potência.

Figura 4. Solução - Software Otimiza



Pode-se perceber que a solução encontrada corresponde a solução encontrada através do Método Simplex. Ou seja,

$$x_1 = 5.000$$
$$x_2 = 5.500$$
$$Z = 1.110.000$$

4. Conclusões

Neste artigo fizemos uma breve explanação sobre o Método Simplex e realizamos uma aplicação detalhada do procedimento de cálculo usando este método.

A maior contribuição deste artigo está na forma detalhada como o problema é resolvido, visto que não existem na literatura tais contribuições. Existem apenas passo-a-passos que não explicam de forma completa como obter a solução do problema de programação linear através do método Simplex.

É importante ressaltar ainda que as soluções encontradas através do método Simplex correspondem exatamente aos vértices Vo, V1, V2 e V3 encontrados através do método gráfico, Figura 2.

Referências bibliográficas

DANTZIG, G. B.; THAPA, M. N. **Linear Programming: 2: Theory and Extensions**. Nova York: [s.n.].

DAVOODI, E.; HAGH, M. T.; ZADEH, S. G. A hybrid Improved Quantum-behaved Particle Swarm Optimization – Simplex method (IQPSOS) to solve power system load flow problems. **Applied Soft Computing Journal**, v. 21, p. 171–179, 2014.

KAGAN N. ET AL. **Métodos de Otimização Aplicados a Sistemas Elétricos de Potência**. São Paulo: [s.n.].

MOLITERNO, C. **MÉTODO SIMPLEX**. Disponível em: <http://www.celiomoliterno.eng.br/Arquivos/Pesop/Metodo Simplex.pdf>. Acesso em: 5 maio. 2016.

NASH, J. C. THE (DANTZIG) SIMFLEX METHOD FOR LINEAR PROGRAMM. **Computing in Science & Engineering**, v. 2, n. 1, p. 29–31, 2000.

NEZAMABADI, H.; VAHIDINASAB, V. Two stage decision making of technical virtual power plants in electricity market via Nash-SFE equilibrium. **2015 3rd International Istanbul Smart Grid Congress and Fair, ICSG 2015**, 2015.

PLOSKAS, N.; SAMARAS, N. The Journal of Systems and Software GPU accelerated pivoting rules for the simplex algorithm. **The Journal of Systems & Software**, v. 96, p. 1–9, 2014.

PLOSKAS, N.; SAMARAS, N. Efficient GPU-based implementations of simplex type algorithms.

APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION, v. 250, p. 552–570, 2015.

SAN, R. E. N. Z.; CHEN, Y. Hybrid Simplex-improved Genetic Algorithm for Global Numerical Optimization. **ACTA Automatica SInica**, v. 33, n. 1, 2007.

SOUSA, R. S. Métodos tipo dual simplex para problemas de otimização linear canalizados *. **Tese doutorado Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP**, p. 168, 2005.

TAN, K. K.; CHIN, S. J.; DOU, H. F. Feedforward suppression of force ripple based on a simplex-optimized dither signal. p. 19–27, 2003.

VELILLA, E.; VALENCIA, J. A.; MORENO, G. “Using genetic algorithm and the simplex method to obtain equivalent circuits of the grounding systems”. **IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America**, p. 1–5, 2008.

YAMAMURA, K.; KITAKAWA, T. “Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits using the simplex method”. **Circuits and Systems 2003. ISCAS ’03. Proceedings of the 2003 International Symposium on,** v. 3, p. III–III, 2003.

---

1. Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil, mbmansilha@gmail.com

2. Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil, fafarret@gmail.com

3. Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Santa Maria, Rio Grande do Sul, Brasil, deise@gedre.ufsm.br

---